

Przykładowe zadania egzaminacyjne na studia drugiego stopnia na kierunku matematyka

Zad. 1. W zbiorze \mathbb{R}^2 wprowadzamy relację P następująco

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2, (x_1, y_1)P(x_2, y_2) \iff x_1^2 + y_2^2 = x_2^2 + y_1^2.$$

Pokazać, że P jest relacją równoważnościową. Zilustrować geometrycznie klasy równoważności na tle tej relacji.

Zad. 2. Pokazać, że następujące zbiory A i B są równoliczne, gdzie:

a) $A = (-1, 3), B = (4, 12);$

b) $A = [-2, 5], B = [7, 9];$

c) $A = (-\infty, 1), B = (2, 3);$

d) $A = (0, 1), B = (0, 1].$

Zad. 3. Znaleźć wszystkie rozwiązania (również zespolone) równania

$$x^3 + x^2 - 2 = 0.$$

Zad. 4. Niech $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie odwzorowaniem zadanym wzorem

$$L(x, y) = (x - y, 2x + y, x - 3y).$$

a) Pokazać, że L jest przekształceniem liniowym.

b) Wyznaczyć macierz przekształcenia L , jeżeli w przestrzeni \mathbb{R}^2 zadana jest baza złożona z wektorów $u = (2, -1), v = (1, 0)$, natomiast w przestrzeni \mathbb{R}^3 zadana jest baza złożona z wektorów $a = (1, 1, 0), b = (1, 0, 1), c = (0, 1, 1)$.

Zad. 5. W zależności od parametru a rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2. \end{cases}$$

Zad. 6. Rozwiązać równania macierzowe

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} + X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Zad. 7. Zbadać monotoniczność i wyznaczyć ekstrema funkcji:

a) $f(x) = \frac{(3x-1)^2}{(2x+3)^3}$;

b) $g(x) = (x^2 - 1)e^x$.

Zad. 8. Wyznaczyć asymptoty funkcji:

a) $f(x) = x \ln \frac{2x}{x-2}$;

b) $g(x) = \frac{x^4}{(1+x)^3}$.

Zad. 9. Wyznaczyć granice funkcji:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+5}{x^2+2} \right)^{x^2+1}$;

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$.

Zad. 10. Wyznaczyć przedziały wypukłości funkcji

$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 + 64x - 11.$$

Zad. 11. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi o równaniach:

$$y = \frac{1}{x}, \quad 3y + 2x - 7 = 0.$$

Zad. 12. Obliczyć długość krzywej o równaniu

$$y = \ln(\cos x), \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}.$$

Zad. 13. Zbadać zbieżność szeregów liczbowych:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{3n^2 + 4n + 7} - \sqrt{3n^2 + 2n - 1})$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n n!}$.

Zad. 14. Rozwiązać równanie różniczkowe

$$y' + 2y = x^2 - x - 1.$$

Zad. 15. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$