

**Pytania i zagadnienia do pisemnej części egzaminu dyplomowego dla
studentów kierunku matematyka studia II stopnia**

1. Przestrzeń liniowa. Podprzestrzeń przestrzeni liniowej. Przestrzenie liniowe izomorficzne.
2. Liniowa zależność i niezależność wektorów. Zbiór liniowo niezależny. Generator i baza przestrzeni liniowej. Wymiar przestrzeni liniowej.
3. Przestrzeń metryczna. Przykłady przestrzeni metrycznych. Zbieżność ciągu w przestrzeni metrycznej.
4. Ciąg Cauchy'ego w przestrzeni metrycznej. Przestrzeń metryczna zupełna. Przykłady.
5. Podstawowe pojęcia topologiczne w przestrzeni metrycznej: punkt wewnętrzny, wnętrze zbioru, zbiór otwarty, punkt skupienia, zbiór domknięty.
6. Przestrzeń topologiczna. Zależność między pojęciami zbioru otwartego i zbioru domkniętego.
7. Zbiory gęste w przestrzeni topologicznej. Przestrzenie ośrodkowe. Przykłady.
8. Granica i ciągłość funkcji w przestrzeniach topologicznych.
9. Zbiór zwarty w przestrzeni topologicznej. Zbiory zwarte w przestrzeni \mathbb{R}^n .
10. Pojęcia ciała i σ -ciała zbiorów. σ -ciało generowane przez dowolną rodzinę zbiorów. Zbiory borelowskie.
11. Miara skończenie addytywna i miara σ – addytywna. Miara zupełna.
12. Miara zewnętrzna. Warunek Carathéodory. Zewnętrzna miara metryczna.
13. Jak przy pomocy miary zewnętrznej zdefiniować miarę?
14. Funkcje mierzalne. Ciągłość a mierzalność w sensie Lebesgue'a.
15. Zbieżność prawie wszędzie i zbieżność według miary.
16. Całkowalność w sensie Lebesgue'a a całkowalność w sensie Riemanna.
17. Przestrzeń unormowana. Przestrzeń Banacha. Przykłady.
18. Ośrodkowość. Baza Schaudera w przestrzeni Banacha. Przykłady.
19. Przestrzeń unitarna. Norma indukowana przez iloczyn skalarny i nierówność Schwarz. Przestrzeń Hilberta. Przykłady przestrzeni Hilberta.
20. Operatory liniowe ograniczone. Norma operatora.
21. Twierdzenie Banacha-Steinhaus. Twierdzenie Banacha o odwzorowaniu otwartym.
22. Funkcjonały liniowe ciągłe. Przestrzeń sprzężona. Przykłady.
23. Funkcje analityczne zmiennej zespolonej. Równania Cauchy'ego-Riemanna. Funkcje harmoniczne.

24. Elementarne funkcje zmiennej zespolonej: funkcja wykładnicza, funkcja logarytmiczna, funkcje trygonometryczne. Własności tych funkcji.
25. Całkowanie funkcji zespolonej wzdłuż konturu. Twierdzenie całkowe Cauchy'ego.
26. Wzór całkowy Cauchy'ego i jego konsekwencje.
27. Nierówność Cauchy'ego. Twierdzenie Liouville'a.
28. Zera funkcji analitycznej. Zera wielomianów zespolonych.
29. Punkty osobliwe i residua.
30. Całka podwójna. Zamiana całki podwójnej na całki iterowane. Twierdzenie o zamianie zmiennych w całce podwójnej.
31. Całka krzywoliniowa skierowana. Zastosowania całki krzywoliniowej skierowanej.
32. Pojęcie pola wektorowego. Pole wektorowe potencjalne i jego charakterystyka.
33. Twierdzenie Greena.
34. Niezależność zdarzeń losowych i niezależność zmiennych losowych.
35. Prawdopodobieństwo warunkowe i twierdzenie Bayesa (wzór na odwrócenie).
36. Zupełny układ zdarzeń i twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym.
37. Dystrybuanta zmiennej losowej i jej związek z rozkładem prawdopodobieństwa.
38. Momenty zmiennej losowej.