Zagadnienia na egzamin dyplomowy na studiach II stopnia na kierunku matematyka

w roku akad. 2023/2024

1. Przestrzeń topologiczna. Przykłady przestrzeni topologicznych. Zależność między pojęciami zbioru otwartego i domkniętego.
2. Zbiory gęste w przestrzeniach topologicznych. Przestrzenie ośrodkowe. Przykłady
3. Przestrzenie spójne, łukowo spójne. Własności i przykłady.
4. Granica i ciągłość funkcji w przestrzeniach topologicznych.
5. Zbiór zwarty w przestrzeni topologicznej. Zbiory zwarte w przestrzeni R^n.
6. Ośrodkowość. Baza Schaudera w przestrzeni Banacha. Przykłady przestrzeni ośrodkowych.
7. Twierdzenia o najlepszej aproksymacji. Szeregi Fouriera względem układów ortogonalnych.
8. Klasyczne twierdzenia o operatorach liniowych ograniczonych.
9. Funkcjonały liniowe ciągłe. Twierdzenie o rozszerzaniu funkcjonałów. Przestrzenie sprzężone niektórych klasycznych przestrzeni Banacha.
10. Mierzalność zbioru w sensie Lebesgue'a oraz charakteryzacja zbioru mierzalnego w sensie Lebesgue'a. Przykład zbioru, który nie jest mierzalny w sensie Lebesgue'a.
11. Funkcje mierzalne w sensie Lebesgue'a oraz ich własności. Charakteryzacja funkcji mierzalnych w sensie Lebesgue'a i jej zastosowanie do dowodu mierzalności w sensie Lebesgue'a następujących klas funkcji: funkcje nieciągłe w skończonej ilości punktów, funkcje nieciągłe w przeliczalnej ilości punktów, funkcje nieciągłe na zbiorze o mierze Lebesgue'a równej zero, funkcje całkowalne w sensie Riemanna.
12. Konstrukcja miary zbioru przy pomocy klasy zbiorów spełniających warunek Caratheodory'ego.
13. Konstrukcja miary Jordana oraz własności tej miary. Miara Jordana a miara przeliczalnie addytywna - porównanie.
14. Funkcja holomorficzna, funkcja analityczna – definicje, własności. Warunek konieczny i wystarczający na holomorficzność funkcji w punkcie.
15. Twierdzenie całkowe Cauchy'ego i jego uogólnienia. Wzór całkowy Cauchy'ego i jego uogólnienia.
16. Punkty osobliwe izolowane funkcji holomorficznej i ich klasyfikacja. Klasyfikacja funkcji holomorficznych ze względu na ich punkty osobliwe. Przykłady.
17. Residuum funkcji, definicja, sposoby obliczania i zastosowania. Twierdzenie o residuach.
18. Definicje równania różniczkowego i zagadnienia Cauchy'ego dla równania i układu równań różniczkowych. Twierdzenie Picarda- Lindelofa.
19. Macierz fundamentalna jednorodnego układu równań różniczkowych liniowych i jej wrońskian. Wzór Liouville'a dla układu równań liniowych.
20. Eksponenta macierzy – definicja i jej związek z macierzą fundamentalną liniowego, jednorodnego układu równań o współczynnikach stałych.
21. Klasyfikacja równań różniczkowych cząstkowych liniowych rzędu drugiego.

22. Parametryzacja naturalna krzywej. Krzywizna i skręcenie krzywej przestrzennej. Trójścian i wzory Freneta. Przykłady krzywych o stałej krzywiźnie.
23. Niezmienniki krzywych płaskich i przestrzennych w grupach izometrii. Twierdzenia o przystawaniu i istnieniu dla krzywych przestrzennych. Przykład dwóch nieizometrycznych krzywych.
24. Pierwsza forma fundamentalna powierzchni, jej związek z długością krzywej na powierzchni i polem płata powierzchni oraz krzywizną Gaussa. Przykłady powierzchni o jednakowej krzywiźnie Gaussa i różnych krzywiznach głównych.
25. Pochodna kowariantna i symbole Christoffela. Przesunięcie równoległe i geodezyjne – definicje i własności.