Zagadnienia na egzamin dyplomowy na studiach I stopnia na kierunku matematyka

w roku akad. 2025/2026

1. Pojęcie relacji określonej w iloczynie kartezjańskim zbiorów, relacja równoważności, klasy abstrakcji, relacja częściowego i liniowego porządku.
2. Funkcja jako relacja, dziedzina, przeciwdziedzina i zbiór wartości funkcji. Suriekcja, iniekcja, bijekcja, funkcja odwrotna.
3. Równoliczność zbiorów, zbiory skończone i nieskończone, przeliczalność i nieprzeliczalność zbiorów.
4. Liczby wymierne, niewymierne, algebraiczne i przestępne oraz ich własności.
5. Grupa. Grupa przemienna. Homomorfizm oraz izomorfizm grup.
6. Pierścień i ciało. Przykłady.
7. Liczby zespolone - definicja, postać algebraiczna, trygonometryczna i wykładnicza liczby zespolonej. Potęgowanie i pierwiastkowanie liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej.
8. Układy równań liniowych i ich rozwiązywanie. Twierdzenie Kroneckera-Capelliego i twierdzenie Cramera.
9. Iloczyn skalarny, wektorowy i mieszany w przestrzeni R^3 – definicje, własności, wybrane zastosowania.
10. Definicja przestrzeni liniowej i podprzestrzeni liniowej. Przykłady przestrzeni liniowych.
11. Pojęcie liniowej zależności i niezależności wektorów. Powłoka liniowa układu wektorów. Definicja bazy przestrzeni liniowej oraz wymiaru przestrzeni liniowej.
12. Przekształcenie liniowe, jądro i obraz przekształcenia liniowego - definicje. Konstrukcja macierzy przekształcenia liniowego w przestrzeniach skończenie wymiarowych.
13. Definicja granicy ciągu liczbowego (we wszystkich trzech przypadkach) oraz ciągu Cauchy'ego. Zależność pomiędzy ciągiem zbieżnym do granicy właściwej a ciągiem Cauchy'ego. Twierdzenie o ciągu monotonicznym i ograniczonym oraz twierdzenie o trzech ciągach.
14. Ciągłość funkcji - definicja otoczeniowa, ciągowa, Cauchy'ego. Granica funkcji - definicja ciągowa i Cauchy'ego. Charakteryzacja pojęcia ciągłości funkcji przy pomocy granicy funkcji.
15. Różniczkowalność funkcji oraz związek różniczkowalności funkcji z ciągłością. Własność Darboux pochodnej funkcji oraz wniosek dotyczący nieistnienia całki nieoznaczonej.
16. Definicja całki oznaczonej w sensie Riemanna oraz twierdzenie Newtona-Leibniza (podstawowe twierdzenie rachunku całkowego).
17. Zastosowania całki oznaczonej w geometrii.
18. Zbieżność szeregu potęgowego, definicja promienia zbieżności i obszaru zbieżności szeregu potęgowego. Podstawowe twierdzenia o rozwijalności funkcji w szereg potęgowy.
19. Definicja pochodnej cząstkowej rzędu pierwszego oraz definicja funkcji różniczkowalnej. Związek między ciągłością i różniczkowalnością funkcji *n* zmiennych.

20. Definicja maksimum i minimum lokalnego funkcji *n* zmiennych. Warunek konieczny i warunek wystarczający istnienia ekstremum funkcji dwóch zmiennych.
21. Definicja funkcji uwikłanej oraz twierdzenie o funkcji uwikłanej.
22. Konstrukcja całki podwójnej po prostokącie. Definicja całki podwójnej po obszarze ograniczonym.
23. Łuk gładki na płaszczyźnie i w przestrzeni, definicja całki krzywoliniowej niezorientowanej. Twierdzenie o zamianie całki krzywoliniowej niezorientowanej na całkę pojedynczą.
24. Definicja całki krzywoliniowej zorientowanej. Twierdzenie Greena.
25. Przestrzeń metryczna. Przykłady przestrzeni metrycznych. Zbieżność ciągu w przestrzeni metrycznej.
26. Ciąg Cauchy'ego w przestrzeni metrycznej. Przestrzeń metryczna zupełna. Przykłady.
27. Punkt skupienia zbioru w przestrzeni metrycznej. Granica funkcji.
28. Definicja i interpretacja geometryczna grafu. Macierzowa reprezentacja grafu -macierz sąsiedztw, macierz incydencji.
29. Minimalne drzewa rozpinające. Metody wyznaczania minimalnych drzew rozpinających.
30. Kolorowanie grafu – liczba chromatyczna. Twierdzenie Brooksa.
31. Zagadnienie Cauchy'ego dla równania różniczkowego drugiego rzędu i jego interpretacja geometryczna.
32. Równanie różniczkowe zupełne.
33. Rzut stereograficzny, płaszczyzna zespolona domknięta, metryka sferyczna.
34. Funkcje zespolone zmiennej zespolonej (funkcja wykładnicza, funkcje trygonometryczne), logarytmowanie i potęgowanie w dziedzinie zespolonej.
35. Część rzeczywista i urojona funkcji zespolonej, pochodna zespolona funkcji, warunki Cauchy'ego – Riemanna, przykłady.
36. Wartość oczekiwana zmiennej losowej i własności wartości oczekiwanej.
37. Dystrybuanta zmiennej losowej i własności dystrybuanty.
38. Prawdopodobieństwo warunkowe, wzór na prawdopodobieństwo całkowite i twierdzenie Bayesa.
39. Niezależność zdarzeń losowych i niezależność zmiennych losowych – definicje i warunki równoważne.